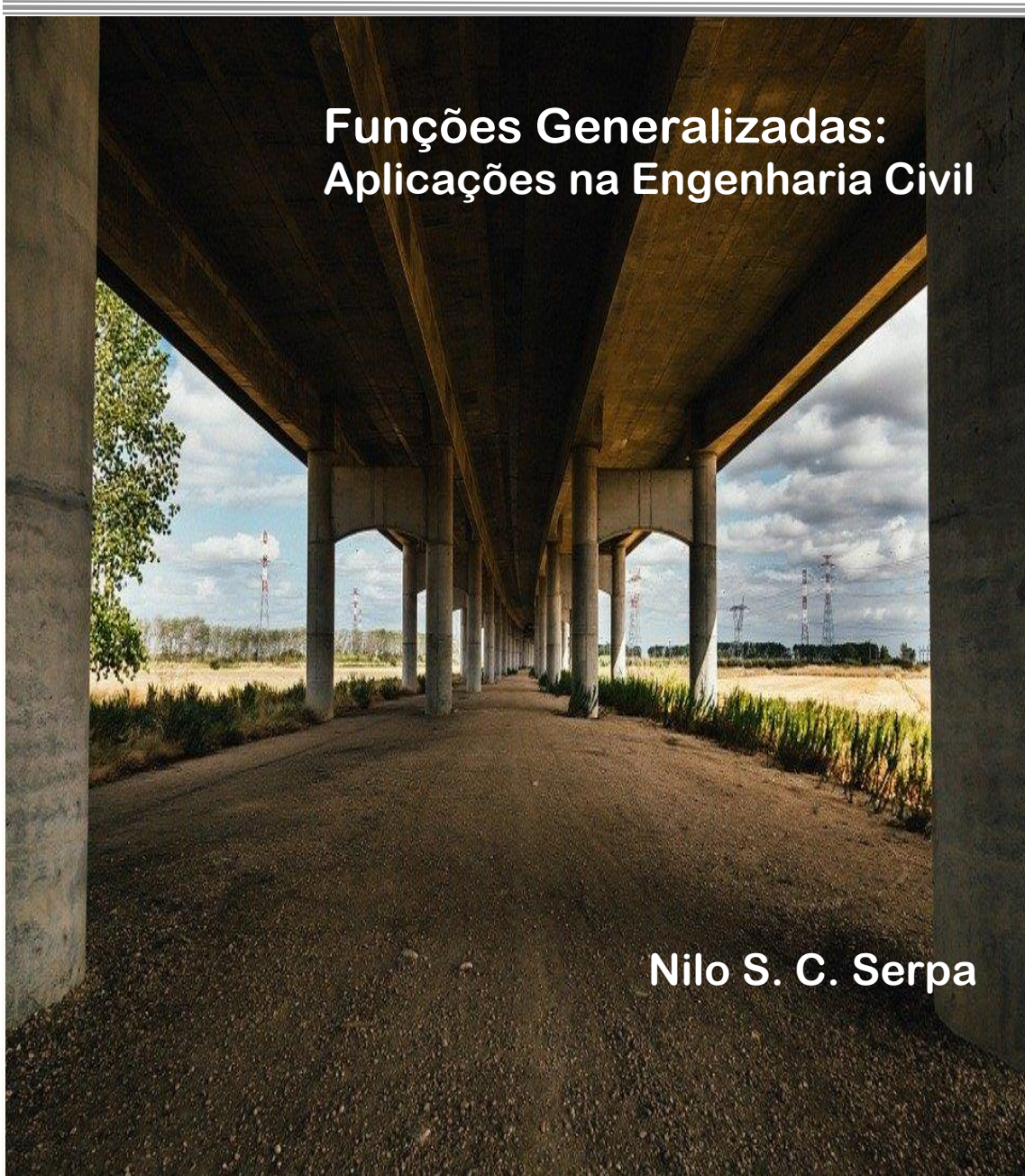




Revista Brasiliense de Engenharia e Física Aplicada

Vol. 5 suplemento - Abril 2020

A photograph showing a long, straight perspective of a bridge underpass. The concrete pillars and beams create a series of arches that recede into the distance. The ground is a dirt path, and the sky is visible through the openings, showing some clouds and distant power lines.

Funções Generalizadas: Aplicações na Engenharia Civil

Nilo S. C. Serpa

**Física Clássica:
sempre há espaço
para novidades**

CALIBRE

*Promovendo ciência
de qualidade com
acessibilidade*

ISSN 2526-4192

Tratado Prático Sobre Funções de Singularidade

Modelamento de Cargas em Vigas de Concreto Armado

Nilo Sylvio Costa Serpa, *Centro Universitário ICESP*.

Received: _12/02/2020_ / Accepted: _20/02/2020_ / Published: _17/03/2020_.

Abstract: Present treatise deals with applications of singularity functions from a broad perspective in civil engineering, extending its use to hyperstatics, and deepening mathematical questions little explored before. The content is presented through examples discussed in detail, giving to the reader a clear and objective reading. Original mathematical formulations are developed, such as the Macaulay-Serpa series. The treatise is extended to the calculation of hyperstatic porticoes and to the modeling of triangular loads. In this context, the theory appears as an important instrument for the analysis of ruptures in reinforced concrete beams. For the accomplishment of this treatise, an exhaustive search of bibliographical references was made, showing that the existent literature on the subject, mostly of foreign origin, is quite limited.

Key words: Singularity functions, reinforced concrete, hyperstatics, discontinuous loading, elastic curve.

Resumo: O presente tratado versa sobre aplicações das funções de singularidade numa ampla perspectiva da engenharia civil, estendendo seu uso à hiperestática e aprofundando questões matemáticas pouco exploradas anteriormente. O conteúdo é apresentado através de exemplos discutidos em detalhes, proporcionando ao leitor uma leitura clara e objetiva. Formulações matemáticas originais são desenvolvidas, como a série Macaulay-Serpa. O tratado é estendido ao cálculo de pórticos hiperestáticos e à modelagem de cargas triangulares. Nesse contexto, a teoria aparece como um instrumento importante para a análise de rupturas em vigas de concreto armado. Para a realização deste tratado, foi feita uma busca exhaustiva das referências bibliográficas, mostrando que a literatura existente sobre o assunto, principalmente de origem estrangeira, é bastante limitada.

Palavras-Chave: Funções de singularidade, concreto armado, hiperestática, carga descontínua, curva elástica.

Letras gregas

$\delta(x-a)$ - Delta de Dirac

δ - flecha (salvo indicação em contrário)

Nomenclatura

$\mathcal{H}(x-a)$ - função de Heaviside

$\langle x-a \rangle^1$ - *brackets* de Macaulay da função de Heaviside

$\int_0^\infty \delta(x-a) dx = \mathcal{H}(a)$ - relação entre a função Delta de Dirac e a função de Heaviside

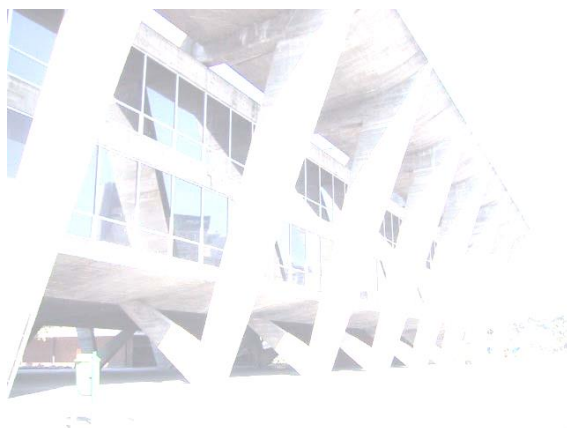
Prólogo

A história republicana do Brasil é uma verdadeira sucessão de escolhas erradas. Pode-se dizer que as quatro últimas décadas confirmaram indiscutivelmente esta afirmação. Somos hoje uma economia dependente, medieval, centrada em produção agro-pecuária, enquanto o resto do mundo avança em tecnologias de ponta. Com o potencial humano, energético e biodiverso que detemos é inaceitável a situação que nos foi imposta por tantos desmandos e malversações.

Sobre o autor: Nilo Sylvio Costa Serpa, *PhD, MSc, MBA*, professor; áreas de pesquisa: gravitação quântica, computação quântica, cosmologia, teoria de campos e engenharia de sistema termodinâmicos. E-mail: niloserpa@icesp.edu.br.

Reflexos claros desse melancólico cenário se observam na educação e na formação de competências profissionais. Nossos modelos acadêmicos, impostos por lideranças obscuras, são retrógrados e respondem por um atraso em áreas exatas de cerca de sessenta anos, segundo consenso de ampla comunidade intelectual brasileira.

Buscando romper com alguns paradigmas anacrônicos do ensino nacional, e tentando voltar, ainda que parcialmente, ao tempo em que estivemos no topo da arquitetura e da engenharia civil mundial, venho, por meio deste tratado, registrar para alunos e professores, uma pequena contribuição ao ensino do cálculo estrutural na engenharia civil, nos melhores moldes da ciência contemporânea praticada além-mar.



1. Introdução

A deflexão de vigas prismáticas de concreto armado é um assunto que, apesar da fundamentação antiga e largamente difundida entre engenheiros, arquitetos e calculistas, ainda oferece alguns atrativos, sobretudo quando se abrem discussões quanto às distintas abordagens possíveis. Muitos autores empregam diferentes modelos de representação do comportamento das vigas, dentre estes, além do modelo clássico baseado em princípios e resultados diretos da teoria da elasticidade [1,12], a teoria das deformações (por cisalhamento) de primeira ordem [3,9], e o modelo dos carregamentos por funções de singularidade a ser discutido aqui [2], porém, com o adendo da representação de cargas distribuídas em rampa por séries de integrações por partes (devida ao próprio autor deste tratado). Seja como for, as premissas clássicas são preservadas no presente trabalho:

- A viga — mais precisamente o material do qual é feita — é linearmente elástica, homogênea e isotrópica;



- Os deslocamentos são pequenos em comparação com a espessura da viga;
- As tensões axiais são pequenas em comparação com a unidade;
- As tensões transversais normais e as tensões de cisalhamento são desprezíveis;
- As secções transversais são planas e perpendiculares ao eixo longitudinal, antes e depois de uma deformação (hipótese de Bernoulli).

Mantidas tais premissas, a energia virtual contida na viga sob tensão produzida pelos carregamentos é dada por

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 dx,$$

onde l é o comprimento da viga, E o módulo de elasticidade do material, I a inércia da peça, e ω o deslocamento vertical. A curvatura k da viga é tal que

$$k \approx \frac{d^2 \omega}{dx^2}.$$

Acontece que as soluções analíticas descritas nos modelos tradicionais envolvem muitas complicações de cálculo em se tratando de carregamentos complexos. Assim, uma diminuição significativa do trabalho matemático pode ser conseguida através da apresentação dos momentos como uma soma de funções de singularidade. A deformação completa é representada por uma única função, e as funções das forças internas e as deflexões podem ser calculadas por integração da função de carga original. Portanto, a costumeira divisão da estrutura em regiões separadas pode ser omitida, sendo substituída por uma expressão única, o que permite um cálculo elegante além de máxima visibilidade analítica quando da necessidade de avaliação do grau de ruína em peças antigas. Mesmo nas situações hiperestáticas mais complexas, a função global original é facilmente particionada para a posterior compatibilização das flechas. Embora este método tenha sido popularizado por Macaulay [4], a ideia permanece pouco conhecida no Brasil, o que é lamentável, pois certamente teríamos mais calculistas competentes se motivados pelo formalismo objetivo e esteticamente atrativo do modelamento ora em apreço, ao invés de uma geração de engenheiros

matematicamente apáticos, ou limitados pelo uso de *softwares* que em nada contribuem para a criatividade projetual.

2. Metodologia

Minhas referências e motivações para o uso das chamadas <<funções de singularidade>>, ou <<funções de descontinuidade>>, vieram da análise de segmentos espaciais de peças lineares rígidas sob a ação de diferentes tensões de deformação. Na verdade, meu objetivo é estender a aplicação de tais funções ao estudo de sistemas hiperestáticos, propondo um método elegante e consistente para auxílio ao mapeamento de rupturas em vigas prismáticas. Esse método também auxilia a tomada de decisão quanto às soluções possíveis para as patologias caracterizadas por ruína de flexão.

O operador matemático das funções de singularidade foi, primeiramente, aplicado em engenharia estrutural de vigas sob cargas complexas na representação entre <<brackets>> devida ao matemático inglês William Macaulay (1853-1936) [4], embora os créditos para o método sejam atribuídos ao matemático alemão Alfred Clebsch (1833-1872) [2] e ao engenheiro civil alemão Otto Föppl (1854-1924). Em seu monumental trabalho de 1862, página 373, Clebsch já expunha claramente a manipulação das funções de singularidade [2]:

“Betrachten wir wieder den Fall gleichmässiger Belastung[...]:

$$Eq\lambda^2 \frac{d^2u}{dz^2} = R - Q l - z + Gq \frac{l - z^2}{2};$$

Und man erhält durch Integration, mit geringer Modification des oben eingeschlagenen Weges¹:

$$Eq\lambda^2 \frac{du}{dz} = R l - z - Q \frac{l - z^2}{2} + Gq \frac{l - z^3}{6};$$

$$Eq\lambda^2 u = R \frac{l - z^2}{2} - Q \frac{l - z^3}{6} + Gq \frac{l - z^4}{24} ”.$$

Como veremos, esta manipulação corresponde exatamente ao tratamento que darei a partir da notação de Macaulay [4]. No entanto, parece que preconceitos em círculos científicos obscureceram os méritos do verdadeiro predecessor das funções de singularidade em seu contexto atual, o

¹ Consideremos novamente o caso da carga uniforme: [...]. E daí se obtém por integração, com uma leve modificação da abordagem adotada: [...]. (Livre tradução do autor).

matemático inglês Oliver Heaviside (1850-1925) [11]. No século XX, essas funções foram aplicadas em uma variedade de situações, incluindo análise de programação de produtividade. Recentemente, eu mesmo as apliquei na construção de um modelo analítico² para estudar a gravidade e entender certo tipo de máquina de tempo natural que ocorreria em um sistema binário de buracos negros [5].

As principais vantagens destas funções como ferramentas de modelagem na física em geral derivam de que a) – elas descrevem fenômenos baseados na geometria, ou melhor, em sua generalização, b) – capturam quaisquer mudanças ao longo da evolução temporal, c) – podem incluir infinitamente muitos segmentos do espaço-tempo em diferentes estados, d) – podem ser redimensionadas por qualquer fator, e) – são independentes das unidades, e f) – são contínuas, diferenciáveis e integráveis como funções comuns.

Até onde a pesquisa foi conduzida não foram encontradas referências atuais exaustivas sobre a introdução das funções de singularidade no cálculo estrutural, tampouco indícios de aplicação plena da teoria em problemas de hiperestática. Hibbeler [3], por exemplo, faz uma lacônica abordagem dessas funções em modelamento de cargas sobre vigas, mas se restringe a exemplos triviais de isostática. Stephen [8] apresenta um ótimo estudo sobre vigas de Timoshenko [9], porém, mantendo-se sob a ótica da isostática. Também Yavari *et al* [10] fazem uma boa explanação da teoria de distribuição de Schwartz [6] em uma dimensão, de grande utilidade para o entendimento da teoria geral das funções de singularidade aplicada a situações com muitos saltos de descontinuidade, conquanto o leitor deva permanecer sem expectativas sobre a hiperestática. Afortunadamente, graças à oportunidade de lecionar as cadeiras de Sistemas Estruturais II, Resistência dos Materiais II e Teoria das Estruturas, no Centro Universitário ICESP, Curso de Engenharia Civil - Brasília, me foi possível avançar bastante nessa área ao ponto de trazer contribuições matemáticas originais para o método, sendo enfático em transversinas de pontes de concreto armado e estruturas hiperestáticas.

É provável que, tal como aconteceu a Heaviside, haja ainda preconceitos referentes à manipulação pouco ortodoxa das funções de singularidade. Contudo, atitudes preconceituosas manifestas em críticas à matemática de algumas teorias físicas caíram em desuso de há muito após Heisenberg (Nobel de física, 1932), para quem a física, ao lançar mão de uma matemática menos rigorosa, consegue aproximar-se da realidade de maneira mais sensível. Há, segundo minha maneira

² Este modelo mereceu o reconhecimento de vários colegas físicos.

de ver, uma razão de rejeição mais essencial. É que os *brackets* estabelecem uma fase matemática topológica, de certa forma inesperada, no processo global de cálculo. Mesmo associados às integrais das funções de Heaviside, bastou-lhes a súbita introdução para caracterizar-se uma falsa disrupção formal à força. Mas, aqui a ordinalidade se impõe à cardinalidade. Importa, nesse momento, a ordem, bem antes que o valor em si. A *analysis situs* precede as diferenças medidas. Por isso, a equação dos momentos em *brackets* independe de escalas e métricas; é, por assim dizer, uma equação topológica que se particulariza, com a análise, numa escolha geométrica. Parte-se, assim, da proposição mais geral (topológica) para as proposições específicas (geométricas).

Ainda assim, pode persistir um desconforto para o analista. A passagem de *brackets* para parênteses não segue um roteiro formal padronizado como de costume. No entanto, a instrução é muito clara: se importam as nuances do carregamento, então a ordinalidade se impõe; do contrário, resta a cardinalidade. Temos então dois estágios de cálculo, duas etapas que se completam numa perfeita associação entre qualidade e quantidade, tal como Bachelard escreveu magistralmente:

*“Mais nous montrons que l'ordre est dans la qualité, indépendamment de toute métaphore quantitative, et que la différence d'intensité elle-même disparaît quand un moyen d'ordination existe encore, ce qui peut sembler être un indice suffisant de la primordialité ordinale.”*³.

Pode ser dito, sem objeção, que a etapa ordinal é uma preparação para as medições. Mas, a sutil percepção da abrangência e do poder do método parece escapar ao calculista. Somente o geômetra será capaz de captá-lo em toda a sua plenitude.

Outra possibilidade de justificativa para a aridez do tema é que, apesar de reduzir consideravelmente a quantidade de páginas de cálculo em comparação com as técnicas convencionais, a modelagem por funções de singularidade requer cuidadoso raciocínio sobre a representação hiperestática, posto que as equações em *brackets* das curvas elásticas dos diferentes carregamentos sobre determinada viga são transparentes à orientação dos intervalos a analisar (da direita para a esquerda, ou vice-versa), o que muitas vezes confunde o calculista inexperiente na escolha das constantes de integração. Salvo restrições como esta, referentes a características e habilidades individuais, o método é robusto e extremamente rigoroso, sendo inclusive esclarecedor

³ Mas nós mostramos que a ordem está no interior da qualidade, independentemente de toda metáfora quantitativa, e que a própria diferença de intensidade desaparece quando ainda subsiste um meio de ordenação, o que talvez pareça um índice suficiente da primordialidade ordinal. (Livre tradução do autor).

sobre a representação infinitesimal da física das estruturas em equilíbrio estático. Traz ainda o percalço prático de permitir que se elabore facilmente a equação dos momentos para qualquer situação, dando ao calculista ampla liberdade de análise.

2.1. Introdução operatorial às funções de singularidade

Por definição, uma função de singularidade, dada em *brackets* de Macaulay, obedece à regra

$$\langle x - x_0 \rangle^n = \begin{cases} x - x_0^n, & x > x_0 \\ 0, & x \leq x_0. \end{cases}$$

Além disto, fazendo $\langle x - x_0 \rangle = X$, devemos escrever

$$\int \langle x - x_0 \rangle^n dX = \frac{1}{n+1} \langle x - x_0 \rangle^{n+1} + C;$$

$$\frac{d \langle x - x_0 \rangle^n}{dX} = n \langle x - x_0 \rangle^{n-1}.$$

Os fundamentos axiomáticos destas definições estão intimamente relacionados às funções de Heaviside, $H(\alpha)$, tendo em conta a função delta de Dirac,

$$\int_0^\infty \delta(x - \alpha) dx = \mathcal{H}(\alpha) \therefore$$

$$\frac{d}{dx} \mathcal{H}(\alpha) = \delta(x - \alpha),$$

$$\int_0^\infty \delta(x - \alpha) f(x) dx = f(\alpha),$$

e a definição

$$\mathcal{H}(x - \alpha) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ 1, & x > \alpha \end{cases}$$

$$x - \alpha \quad \mathcal{H} \quad x - \alpha$$

de tal maneira que obtemos o gráfico da Figura 1.

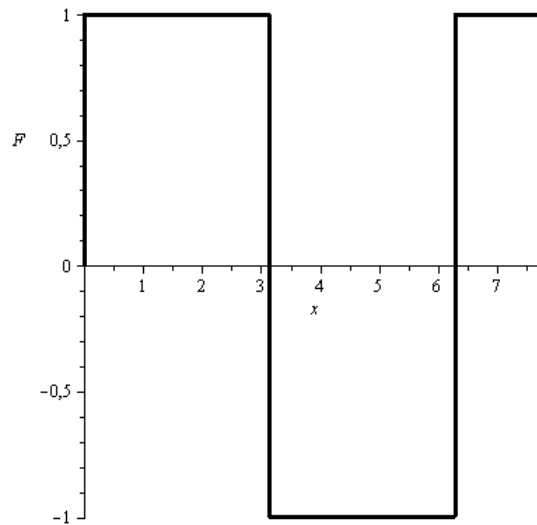


Fig. 1 – Função de Heaviside.

3. Aplicações à hiperestática

3.1. Carga distribuída uniformemente sobre três apoios

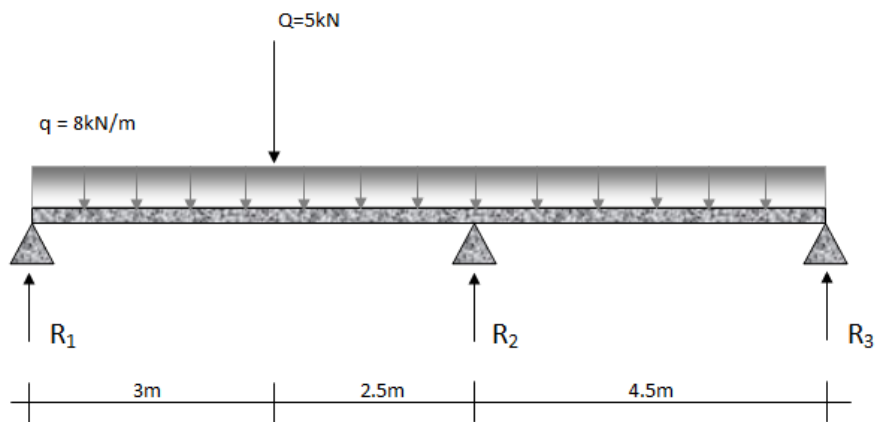


Fig. 2 – Esquema hiperestático básico.

Modelemos o sistema da Figura 2 pelas integrais das funções de Heaviside, da seguinte maneira:

$$\sum M_x = 0 = R_1 \int \mathcal{H}(x-a)dx - Q \int \mathcal{H}(x-c)dx + R_2 \int \mathcal{H}(x-d)dx - \frac{qx^2}{2}.$$

Transformando a expressão anterior para *brackets* de Macaulay,

$$\sum M_x = 0 = R_1 \langle x-a \rangle^1 - Q \langle x-c \rangle^1 + R_2 \langle x-d \rangle^1 - \frac{qx^2}{2}.$$

Diante da configuração anotada, temos as constantes⁴

$$a = 0;$$

$$c = 3;$$

$$d = 5.5;$$

$$l = 10.$$

Fazendo as substituições, temos, pela condição isostática,

$$10R_1 - 35 + 4.5R_2 - 400 = 0;$$

$$\boxed{R_1 = 43.5 - 0.45R_2}.$$

Estabelecido o pré-requisito isostático, podemos efetuar o cálculo particionado do somatório dos momentos fletores, abstraindo um a um os esforços em atuação.

3.1.1. Abstraindo R_2 e Q :

$$\sum M_x = R_1 \langle x-a \rangle^1 - \frac{qx^2}{2}.$$

A curva elástica fica então

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{IE} \left[\frac{x^3}{6} R_1 - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2 \right]$$

Adotemos $R_1 = ql/2$, $C_1 = -ql^3/24$. Uma vez que a segunda constante de integração aparece isolada e não acrescenta informação relevante para o cômputo dessa flecha em especial, podemos ignorá-la e reescrever a curva elástica como

$$\delta_q = \frac{qx}{24IE} [l^3 - 2x^2l + x^3];$$

⁴ As constantes marcam os saltos de carga, caracterizando os pontos singulares.

$$\delta_q = \frac{8 \times 5.5}{24IE} [10^3 - 2 \times 5.5^2 \times 10 + 5.5^3];$$

$$\boxed{\delta_q = \frac{1029.19}{IE}}.$$

Note que o valor de x considerado corresponde ao ponto de singularidade virtual, isto é, referente ao segundo apoio que não aparece nessa abstração.

3.1.2. Abstraindo todos os carregamentos, menos a carga unitária fictícia no segundo apoio:

$$\sum M_x = 0 = R_1 \langle x-a \rangle^1 + R_2 \langle x-d \rangle^1.$$

Neste caso, a curva elástica se resume a

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{IE} \left[\frac{x^3}{6} R_1 + \frac{\langle x-d \rangle^3}{6} R_2 + C_1 x + C_2 \right].$$

As substituições são

$$P=1, R_1 = P \langle x-d \rangle / l, R_2 = Px / l, C_1 = -Pl \langle x-d \rangle / 6.$$

Dessa forma, mantendo o raciocínio sobre as constantes de integração,

$$\delta_l = \frac{1}{6IE} \left[\frac{x^3 P \langle x-d \rangle}{l} + \langle x-d \rangle^3 \frac{Px}{l} - C_1 x \right];$$

$$\delta_l = \frac{P \langle x-d \rangle x}{6IE} [x^2 + \langle x-d \rangle^2 - l^2];$$

$$\delta_l = -\frac{P \langle x-d \rangle x}{6IE} [l^2 - \langle x-d \rangle^2 - x^2];$$

$$\delta_l = \frac{-1 \times 4.5 \times 5.5}{6 \times 10 \times IE} [10^2 - 4.5^2 - 5.5^2];$$

$$\delta_l = \frac{-20.42}{IE}.$$

3.1.3. *Abstraindo todos os carregamentos, menos a carga Q :*

$$\sum M_x = 0 = R_1 \langle x-a \rangle^1 - Q \langle x-c \rangle^1.$$

A curva elástica se torna

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{IE} \left[\frac{x^3}{6} R_1 - \frac{\langle x-c \rangle^3}{6} Q + C_1 x + C_2 \right].$$

Nesse caso será necessário incluir nos cálculos a constante C_2 , de modo que

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{IE} \left[\frac{x^3}{6} R_1 - \left(\frac{\langle x-c \rangle^3}{6} Q + C_2 \right) + C_1 x \right].$$

Consideremos as seguintes substituições:

$$R_1 = -Qb/l, \quad C_1 = Qbl/6, \quad C_2 = QC_3/6.$$

Portanto,

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{6IE} \left[-x^3 \frac{Qb}{l} - Q \langle x-c \rangle^3 + C_3 + Qblx \right].$$

Além disto, $\langle x-c \rangle^3 + C_3 = \frac{x b^3}{l}$, com $b = l-d$. Dessarte, como de praxe,

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{1}{6IE} \left[-x^3 \frac{Qb}{l} - Q \frac{x b^3}{l} + Qblx \right];$$

$$\frac{1}{IE} \iint M_x dx = \frac{Q(l-d)x}{6IE} [-x^2 - (l-d)^2 + l^2];$$

$$\delta_Q = \frac{5 \times 4.5 \times 3}{60IE} [-3^2 - 4.5^2 + 10^2];$$

$$\boxed{\delta_Q = \frac{79.59}{IE}}.$$

A partir de $\langle x - c \rangle^3 + C_3 = \frac{x b^3}{l}$, deduz-se o valor de C_3 :

$$\langle x - c \rangle^3 + C_3 = \frac{x b^3}{l},$$

$$\langle 10 - 3 \rangle^3 + C_3 = \frac{3 \langle 10 - 5.5 \rangle^3}{10},$$

$$C_3 = -315.66.$$

O leitor deve observar que se tem liberdade de manipulação das constantes, dependendo da situação. À exceção dos casos de estruturas exóticas, as substituições seguem o mesmo padrão de acordo com as flechas a determinar.

3.1.4. Compatibilizando as flechas

Finalmente, as flechas calculadas independentemente devem ser contrabalançadas, de tal maneira que possamos garantir a estabilidade do sistema. Aplicando a equação de compatibilização, obtemos que

$$\left(\frac{1029.19}{IE} + \frac{79.59}{IE} \right) - R_2 \frac{20.42}{IE} = 0 \therefore$$

$$\boxed{R_2 = 54.30 \text{ kN}}.$$

3.1.5. Encontrando R_1 e R_3

Voltando à condição isostática,

$$R_1 = 43.5 - 0.45 \times 54.30 \therefore$$

$$\boxed{R_1 = 19.06 \text{ kN}}.$$

Efetuando o somatório das forças verticais para encontrar a terceira reação de apoio, segue

$$R_1 + R_2 + R_3 - Q - 80 = 0 \therefore$$

$$\boxed{R_3 = 11.64 \text{ kN}}.$$

É importante observar que, embora haja certa arte em deduzir as substituições, na maioria das situações elas serão as mesmas apresentadas acima, salvo indicação explícita em contrário. Um *hint* fundamental para o cálculo exato é o de se buscar sempre configurar o conteúdo entre chaves da equação elástica de modo que o arranjo de sinais deixe positivo o termo da constante de integração. Outra observação de cunho prático é garantir que a flecha δ_l seja a parte negativa da equação de compatibilização.

3.2. Carga não - uniformemente distribuída em rampa triangular

A atuação de um carregamento com distribuição triangular ocasiona uma complexidade inesperada para quem já se acostumou com a simplificação de cálculo oferecida pelo método aqui estudado. Pois, cargas distribuídas de modo não-homogêneo, ainda que linear, acarretam o aparecimento de integrais exteriores às integrais de Heaviside. Estas integrais não operam sobre os *brackets*, agindo por soma contínua natural ao longo de todo o intervalo da distribuição. Assim, as integrais exteriores são transparentes para as integrais de Heaviside. Esta característica dá origem a uma série infinita cujos termos são construídos por uma sucessão de integrações por partes. Portanto, surge a questão de como aproximar

esta série de um resultado satisfatório e seguro. Essa análise, em que pese sua relativa complexidade, conduz a resultados de grande precisão, muito úteis quando se busca comparar o cálculo efetuado com os valores produzidos automaticamente por *softwares* como o FTOOL.

Por simplicidade, seja a Figura 3, exibindo um carregamento não uniformemente distribuído em configuração triangular.

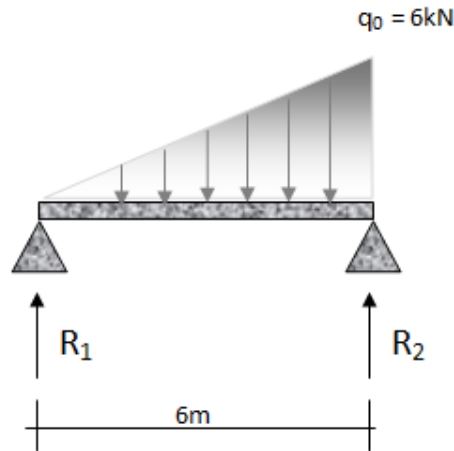


Fig. 3 – Carregamento triangular.

A modelagem da carga distribuída fornece

$$-\int \left[q_0 \frac{l}{x} \int \mathcal{H}(x-l) dx \right] dl ;$$

$$-\int q_0 \frac{l}{x} \langle x-l \rangle^1 dl .$$

Ao buscar-se a equação da curva elástica, a dupla integração nos leva a escrever

$$-\int q_0 l \left[\iint x^{-1} \langle x-l \rangle^1 dx \right] dl .$$

Concentremos atenção na integração interna,

$$\begin{aligned}
& \iint x^{-1} \langle x-l \rangle^1 dx; \\
& \int \left[x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^2}{2} + \int \frac{\langle x-l \rangle^2}{2} x^{-2} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + \int \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} x^{-2} dx + \int \left[\int \frac{\langle x-l \rangle^2}{2} x^{-2} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + \int \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} x^{-2} dx + \int \left[x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + \int \frac{\langle x-l \rangle^3}{3} x^{-3} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{24} + \int \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} x^{-3} dx + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{24} + \int \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} x^{-3} dx + \int \left[\int \frac{\langle x-l \rangle^3}{3} x^{-3} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + \int \frac{\langle x-l \rangle^4}{6} x^{-3} dx + \int \left[\int \frac{\langle x-l \rangle^3}{3} x^{-3} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + \int \frac{\langle x-l \rangle^4}{6} x^{-3} dx + \int \left[x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + \int \frac{\langle x-l \rangle^4}{4} x^{-4} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{30} + \int \frac{\langle x-l \rangle^5}{10} x^{-4} dx + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{60} + \\
& + \int \frac{\langle x-l \rangle^5}{20} x^{-4} dx + \int \left[\int \frac{\langle x-l \rangle^4}{4} x^{-4} dx \right] dx; \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{20} + \frac{3}{20} \int \langle x-l \rangle^5 x^{-4} dx + \int \dots \\
& x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{20} + x^{-4} \frac{\langle x-l \rangle^6}{40} + \frac{1}{10} \int \langle x-l \rangle^6 x^{-5} dx + \int \dots \quad (16)
\end{aligned}$$

Truncando a série, com aproximação até o termo de ordem 6,

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2 - 3xl + 3l^2 - x^{-1}l^3}{6} + \frac{x^2 - 4xl + 6l^2 - 4x^{-1}l^3 + x^{-2}l^4}{12} + \frac{x^2 - 5xl + 10l^2 - 10x^{-1}l^3 + 5x^{-2}l^4 - x^{-3}l^5}{20} + \\
& \quad + x^{-4} \frac{\langle x-l \rangle^6}{40} + \int \dots ; \\
& \frac{3x^2 - 10xl + 12l^2 - 6x^{-1}l^3 + x^{-2}l^4}{12} + \frac{x^2 - 5xl + 10l^2 - 10x^{-1}l^3 + 5x^{-2}l^4 - x^{-3}l^5}{20} + \\
& \quad + x^{-4} \frac{\langle x-l \rangle^6}{40} + \int \dots .
\end{aligned}$$

Por amor à economia de espaço, mantive o termo de sexta ordem na forma condensada em *brackets* sem desenvolver o polinômio. Seria arriscado supor a convergência desta série pela última expressão. No entanto, observando o comportamento da sequência (16), é fácil deduzir que os *brackets* após

$$x^{-4} \frac{\langle x-l \rangle^6}{40}$$

vão se tornando desprezíveis; o valor dos termos decresce a cada integração. Desta forma, ignorando as integrais posteriores, a soma infinita em dl fica reduzida a

$$-q_0 \int \left[\frac{3x^2l - 10xl^2 + 12l^3 - 6x^{-1}l^4 + x^{-2}l^5}{12} + \frac{x^2l - 5xl^2 + 10l^3 - 10x^{-1}l^4 + 5x^{-2}l^5 - x^{-3}l^6}{20} + lx^{-4} \frac{\langle x-l \rangle^6}{40} \right] dl . \quad (17)$$

Portanto, assumimos que a expansão

$$\iint x^{-1} \langle x-l \rangle^1 dx = x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{20} + \frac{3}{20} \int \langle x-l \rangle^5 x^{-4} dx + \int \dots$$

converge, sendo o valor aproximado (truncado) de cálculo na equação da curva elástica estabelecido pela expressão (17). Esta série ficou conhecida como série de Macaulay-Serpa, assim chamada carinhosamente por alguns ex-alunos.

A aproximação sugerida é aceitável, e vamos demonstrá-lo. Sejam as quantidades

$$A = x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6} + x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12} + x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{20}; \quad a = x^{-1} \frac{\langle x-l \rangle^3}{6};$$

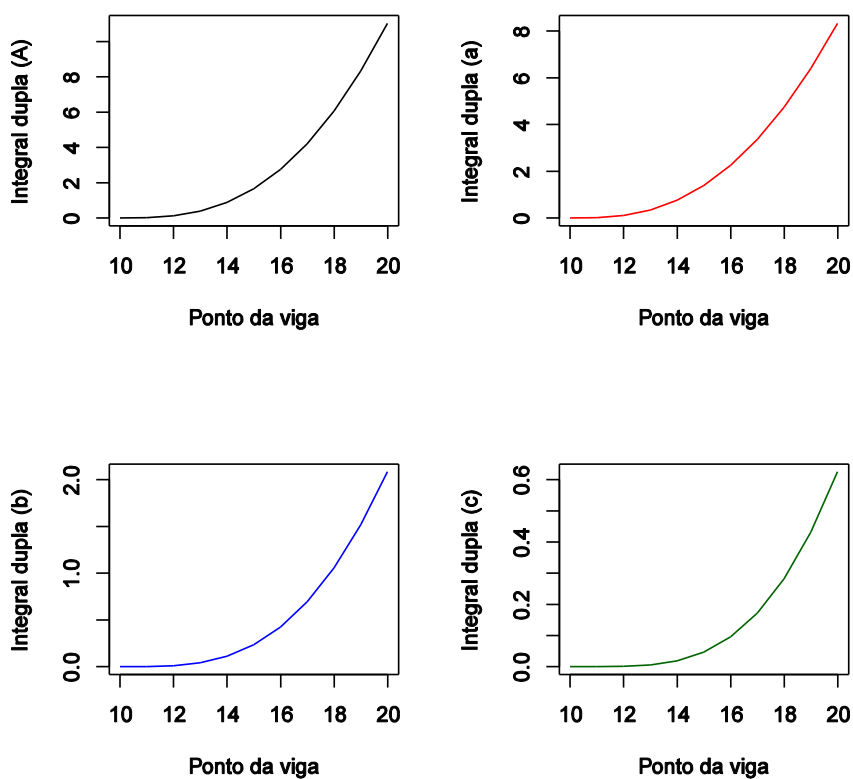
$$b = x^{-2} \frac{\langle x-l \rangle^4}{12}; \quad c = x^{-3} \frac{\langle x-l \rangle^5}{20}.$$

A Tabela 1 mostra nas linhas o valor total << A >> da série truncada e, lado a lado, os valores dos termos << a >>, << b >> e << c >>, separadamente, variando-se, nas colunas, o ponto << x >> de referência na viga. Foi considerado um comprimento de viga de 20 unidades de extensão, e de 10 unidades de extensão para o comprimento << l >> do carregamento em rampa. Como se observa, a coluna << c >> justifica um limite de aproximação aceitável. A Figura 4 exhibe as exponenciais correspondentes às colunas da Tabela 1 em evolução dentro de domínios cada vez menores conforme avançamos aos termos mais distantes da série.

Portanto, as séries de Macaulay-Serpa são a confirmação teórica da praticidade descrita mais acima, Seção 2. Metodologia, pela qual as funções de singularidade podem incluir infinitamente muitos segmentos de uma peça em diferentes estados de tensão, sendo estas funções contínuas, diferenciáveis e integráveis tal como as funções comuns com que lidamos no cotidiano. Pode-se pensar que para uma rampa parabólica o cálculo seria praticamente o mesmo, ou até mais complicado. No entanto, a extensão do cálculo é, neste caso, bem menor. Deixo ao leitor o exercício de deduzir a expressão para a distribuição parabólica.

Tabela 1 – Evolução dos termos da série de Macaulay-Serpa.

A	a	b	c
11.04166667	8.333333333	2.0833333333	6.250000e-01
8.33972882	6.39473684	1.5145429363	4.304490e-01
6.07517147	4.74074074	1.0534979424	2.809328e-01
4.22612118	3.36274510	0.6923298731	1.710462e-01
2.76679687	2.25000000	0.4218750000	9.492188e-02
1.66666667	1.38888889	0.2314814815	4.629630e-02
0.88940719	0.76190476	0.1088435374	1.865889e-02
0.39162494	0.34615385	0.0399408284	5.530269e-03
0.12129630	0.11111111	0.0092592593	9.259259e-04
0.01587779	0.01515152	0.0006887052	3.756574e-05
0.00000000	0.00000000	0.0000000000	0.000000e+00

**Fig. 4** – Exponenciais correspondentes à Tabela 1.

3.2. Reação de apoio devida a cargas permanentes em pontes

Um estudo feito por Marcos Sousa [7], dimensionando os esforços na ponte sobre o Córrego Concórdia – PR em uso da norma NB-6/1960 e da norma atual NBR-7188/2013, e depois comparando os resultados, nos coloca diante de uma excelente oportunidade de aplicação do modelo em pauta. O referido estudo teve por base os procedimentos de cálculo de Marchetti e de Pfeil [7]. O projeto de engenharia rodoviária foi gentilmente cedido pelo DNIT. O cálculo por funções de singularidade mostra pequenas diferenças a maior, presumivelmente devidas a aproximações, uma vez que surgem integrais definidas expressando a análise das cargas distribuídas em rampa linear. Entretanto, como se constatará na seção subsequente, o estudo exigiu um *recall* do cálculo na mísula da transversina.

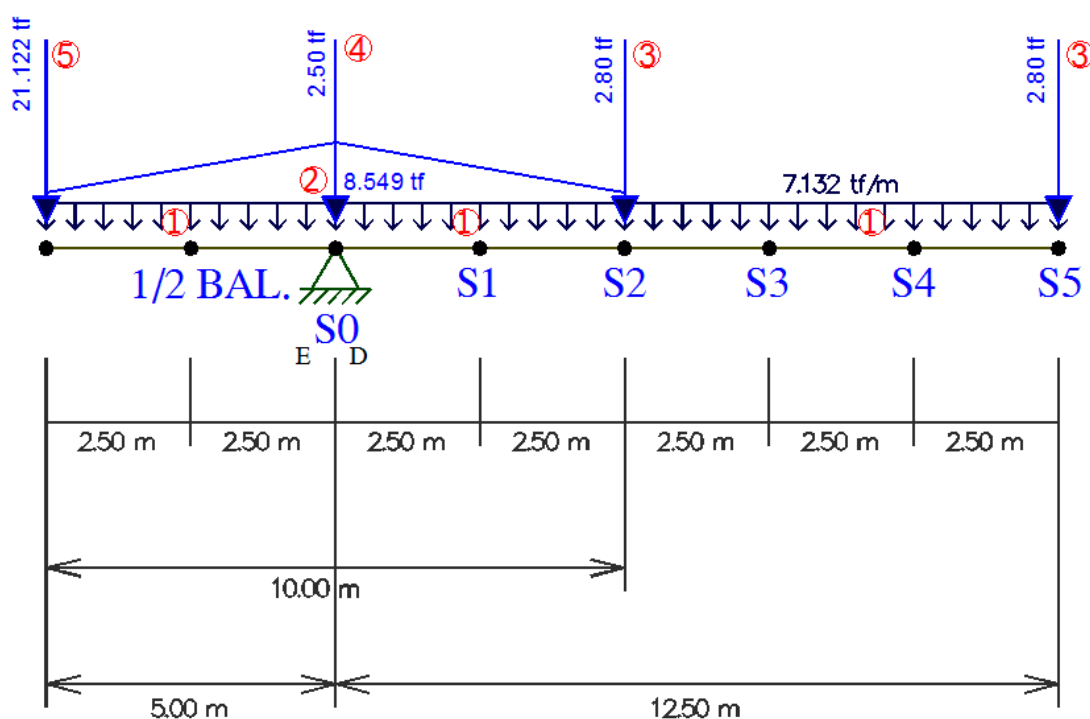


Fig. 5 – Distribuição das cargas permanentes em uma ponte (cortesia de Marcos Sousa).

A Figura 5 esquematiza a seção transversal da viga-tipo principal com as solicitações ocasionadas pela ação do peso próprio dos componentes estruturais, constituindo assim as

cargas permanentes distribuídas e concentradas. Foi considerada apenas metade da seção transversal da transversina por se tratar de uma estrutura perfeitamente simétrica, a qual, à guisa de simplificação de cálculo, pode ser dividida em duas partes idênticas. Não caberia aqui repetir as considerações técnicas relevantes listadas por Sousa [7] de modo exaustivo. Limitar-me-ei a ressaltar que a carga triangular representada na Figura 5 se refere tão-somente ao alargamento da viga na região próxima ao apoio.

Seja, portanto, o modelamento dos momentos até o ponto S5. Considerando-se que neste ponto o somatório dos momentos totaliza 393.94tf m, tem-se

$$\begin{aligned} \sum M_{ss} = & -21.122 \int \mathcal{H}(x-a)dx + R_1 \int \mathcal{H}(x-b)dx - 2.5 \int \mathcal{H}(x-b)dx + \\ & + \frac{2\langle x-x_1/2 \rangle}{x_1} \times \left\{ -2 \times 1.7098 \int \left[\frac{l}{x_1} \int \mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl - 2 \times 1.7098 \int \left[\frac{1}{x_1} \int (x_1-l)\mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl \right\} - \\ & - 2.8 \int \mathcal{H}(x-c)dx - 7.132 \int (x-d)\mathcal{H}(x-d)dx = 393.94 \text{tf m.} \end{aligned}$$

Observe que a integral da carga triangular será definida de acordo com o intervalo em rampa delimitado sobre a viga. As quantidades x_1 e l se restringem a este intervalo, enquanto x percorre toda a viga. Assim, o *bracket* externo $\langle x-x_1/2 \rangle$ se anula para $x \leq x_1/2$.

Transformando a expressão completa para *brackets*, segue

$$\begin{aligned} \sum M_{ss} = & -21.122 \langle x-a \rangle^1 + R_1 \langle x-b \rangle^1 - 2.5 \langle x-b \rangle^1 + \\ & + \frac{2\langle x-x_1/2 \rangle}{x_1} \times \left\{ -2 \times 1.7098 \int \left[\frac{l}{x_1} \langle x_1-l \rangle^1 \right] dl - 2 \times 1.7098 \int \left[\frac{1}{x_1} \langle x_1-l \rangle^2 \right] dl \right\} - 2.8 \langle x-c \rangle^1 - \\ & - \frac{7.132 \langle x-d \rangle^2}{2} = 393.94 \text{tf m.} \end{aligned}$$

Neste cenário as constantes são

$$\begin{aligned}
 a &= 0; \\
 b &= 5; \\
 c &= 10; \\
 d &= 0; \\
 x_1 &= 10.
 \end{aligned}$$

Fazendo as substituições,

$$\begin{aligned}
 \sum M_{s5} &= -21.122 \times 17.5 + 12.5 R_1 - 2.5 \times 12.5 + \\
 &+ \frac{2 \langle x - x_1 / 2 \rangle}{x_1} \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\
 &- 2.8 \times 7.5 - \frac{7.132 \times 17.5^2}{2} = 393.94 \text{ tf m};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{s5} &= -21.122 \times 17.5 + 12.5 R_1 - 2.5 \times 12.5 + \\
 &+ 2.5 \times -0.34196 \times 125 - 41.6667 - 0.34196 \times 500 - 750 + 291.6667 - \\
 &- 2.8 \times 7.5 - \frac{7.132 \times 17.5^2}{2} = 393.94 \text{ tf m};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum M_{s5} &= -21.122 \times 17.5 + 12.5 R_1 - 2.5 \times 12.5 + \\
 &+ 2.5 \times -28.4966 - 14.2483 - 2.8 \times 7.5 - \\
 &- \frac{7.132 \times 17.5^2}{2} = 393.94 \text{ tf m}.
 \end{aligned}$$

Daqui se obtém

$$R_1 = 161.18 \text{ tf}.$$

Este valor é bem próximo ao valor de projeto informado, 159.72tf, e confirma o valor fornecido pelo *software* FTOOL. Adotando-se as propriedades dos *brackets*, é possível

calcular facilmente os momentos fletores por trecho de viga. Dessa forma, para os intervalos estabelecidos na Figura 5, tem-se que

Trecho [0, S4]

$$\begin{aligned} \sum M_{S4(x=15)} = & -21.122 \langle x-a \rangle^1 + 161.18 \langle x-b \rangle^1 - 2.5 \langle x-b \rangle^1 + \\ & + \frac{2 \langle x-x_1/2 \rangle}{x_1} \times \left\{ -2 \times 1.7098 \int \left[\frac{l}{x_1} \langle x_1-l \rangle^1 \right] dl - 2 \times 1.7098 \int \left[\frac{1}{x_1} \langle x_1-l \rangle^2 \right] dl \right\} - \\ & - 2.8 \langle x-c \rangle^1 - \frac{7.132x^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{S4(x=15)} = & -21.122 \times 15 + 161.18 \times 10 - 2.5 \times 10 + \\ & + 2 \times -28.4966 - 14.2483 - 2.8 \times 5 - \\ & - \frac{7.132 \times 15^2}{2} = 368.13 \text{ tf m.} \end{aligned}$$

Trecho [0, S3]

$$\begin{aligned} \sum M_{S3(x=12.5)} = & -21.122 \times 12.5 + 161.18 \times 7.5 - 2.5 \times 7.5 + \\ & + 1.5 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ & - 2.8 \times 2.5 - \frac{7.132 \times 12.5^2}{2} = 297.77 \text{ tf m.} \end{aligned}$$

Trecho [0, S2]

$$\begin{aligned} \sum M_{S2(x=10)} = & -21.122 \times 10 + 161.18 \times 5 - 2.5 \times 5 + \\ & + \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ & - \frac{7.132 \times 10^2}{2} = 182.83 \text{ tf m.} \end{aligned}$$

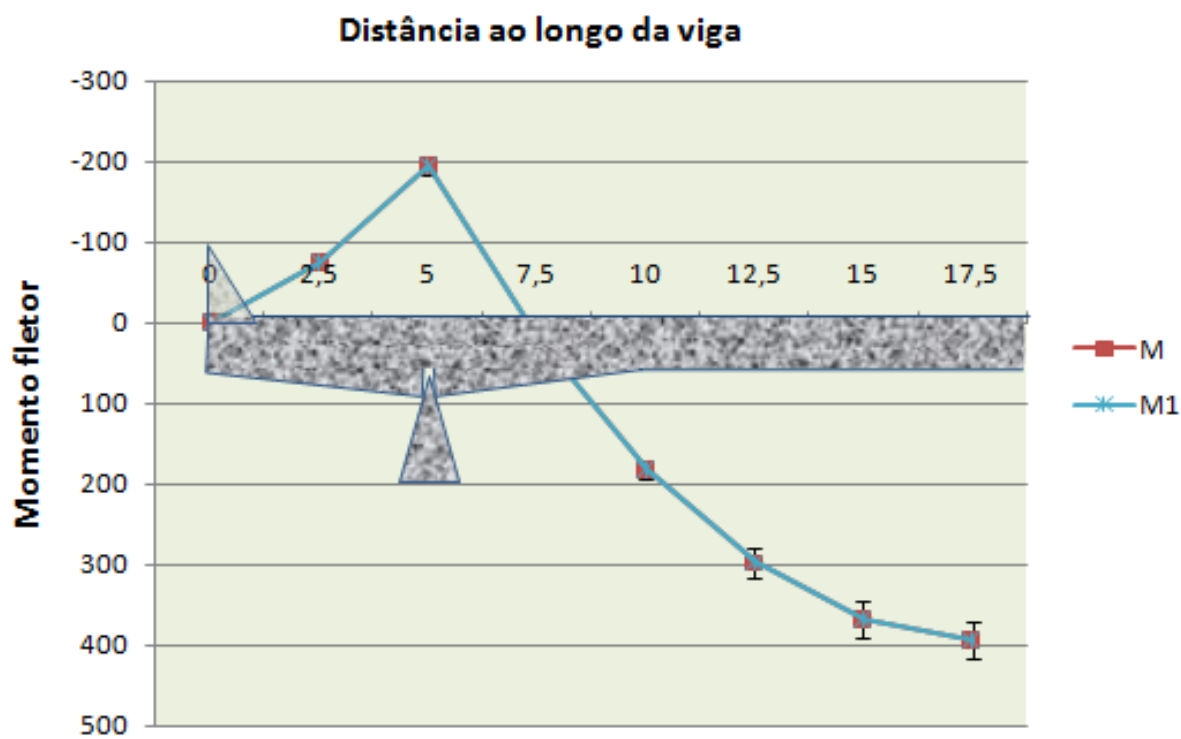


Fig. 6 – Momentos fletores fornecidos no projeto original (em azul) em comparação com os valores calculados no modelo proposto (em marrom, com barras de erro de 6%).

Trecho [0, S0]

$$\begin{aligned}\sum M_{S0(x=5)} &= -21.122 \times 5 + \\ &+ 0 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{7.132 \times 5^2}{2} = -194.76 \text{ tf m.}\end{aligned}$$

Trecho [0, S1]

$$\begin{aligned}\sum M_{S1(x=7.5)} &= -21.122 \times 7.5 + 161.18 \times 2.5 - 2.5 \times 2.5 + \\ &+ 0.5 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{7.132 \times 7.5^2}{2} = 16.32 \text{ tf m.}\end{aligned}$$

Trecho [0, S0_{2.5}]

$$\begin{aligned}\sum M_{S0(x=2.5)} &= -21.122 \times 2.5 - \\ &- 0 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ &\quad - \frac{7.132 \times 2.5^2}{2} = -75.09 \text{ tf m.}\end{aligned}$$

A Figura 6 compara as curvas dos momentos para o projeto executado e para o modelo proposto, mostrando concordância de praticamente 100%. A Tabela 2 mostra os valores dos momentos calculados das duas maneiras.

Tabela 2 – Comparação entre os valores dos momentos fletores (tf m).

Trecho até	½ Bal	S0	S1	S2	S3	S4	S5
Projeto	-75.09	-194.75	16.34	182.85	297.79	368.15	393.94
Modelo	-75.09	-194.76	16.32	182.83	297.77	368.13	393.94

Podemos, então, definir uma nova função $\hat{\delta}(x, x_1)$, tal que

$$\hat{\delta}(x, x_1) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1/2 \\ 2(x - x_1/2)/x_1, & x > x_1/2 \end{cases} \quad 1, \quad x = x_1.$$

Portanto, a equação modelar dos momentos ao longo de qualquer trecho de viga da ponte em questão, considerada reta e ortogonal, sendo biapoiada com balanço, com carga em rampa linear representando o engrossamento da viga junto aos apoios, toma a forma geral

$$\begin{aligned} \sum M = & -21.122 \int \mathcal{H}(x-a)dx + R_1 \int \mathcal{H}(x-b)dx - 2.5 \int \mathcal{H}(x-b)dx + \\ & + \hat{\delta}(x, x_1) \times \left\{ -2 \times 1.7098 \int \left[\frac{l}{x_1} \int \mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl - 2 \times 1.7098 \int \left[\frac{1}{x_1} \int (x_1-l)\mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl \right\} - \\ & - 2.8 \int \mathcal{H}(x-c)dx - 7.132 \int (x-d)\mathcal{H}(x-d)dx. \end{aligned}$$

3.3. Revendo a mísula da transversina (pós-escrito ao cálculo apresentado no estudo da ponte sobre o Córrego Concórdia – PR): um recall necessário

Uma revisão acurada dos cálculos me levou a implementar certo ajuste da forma pela qual modeliei o carregamento triangular numa seção da mísula inferior à sua metade, revocando o procedimento-padrão nessa parte da transversina. O problema é que na mísula,

para $x \leq x_1/2$ há um resíduo da carga triangular a ser computado, fato que exige análise independente do quinhão efetivo da carga distribuída sobre o intervalo considerado. Assim, precisei introduzir o delta de Dirac,

$$\delta = \begin{cases} 0, & x > x_1/2 \\ 1, & x \leq x_1/2 \end{cases},$$

no intuito de validar a ação do momento $\overset{\Delta}{M}$ referente à diferença de carga distribuída na viga a partir da mísula. Portanto, a forma geral ligeiramente modificada fica

$$\begin{aligned} \sum M_x = & -21.122 \int \mathcal{H}(x-a)dx + R_1 \int \mathcal{H}(x-b)dx - 2.5 \int \mathcal{H}(x-b)dx + \\ & + \hat{\delta}(x, x_1) \times \left\{ -2 \times 1.7098 \int \left[\frac{l}{x_1} \int \mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl - 2 \times 1.7098 \int \left[\frac{1}{x_1} \int (x_1-l)\mathcal{H}(x_1-l)dx_1 \right] dl \right\} - \delta \overset{\Delta}{M} - \\ & - 2.8 \int \mathcal{H}(x-c)dx - 7.132 \int (x-d)\mathcal{H}(x-d)dx. \end{aligned}$$

O momento revocado até o ponto $x = 2.5$ é

Trecho $[0, S_{02.5}]$ (revocado)

$$\begin{aligned} \sum M_{S_0(x=2.5)} = & -21.122 \times 2.5 - \\ & - 0 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ & - \frac{2.5 \times 1.7098}{2} \times \frac{1}{3} \times 2.5 - \frac{7.132 \times 2.5^2}{2} = -76.87 \text{ tf m.} \end{aligned}$$

Subsequentemente,

Trecho [0, S0] (revocado)

$$\begin{aligned} \sum M_{S0(x=5)} = & -21.122 \times 5 + \\ & + 0 \times \left\{ -\frac{2 \times 1.7098}{10} \left(\frac{10 \times l^2}{2} \Big|_0^5 - \frac{l^3}{3} \Big|_0^5 \right) - \frac{2 \times 1.7098}{10} \left(10^2 \times l \Big|_5^{10} - 2 \times 10 \frac{l^2}{2} \Big|_5^{10} + \frac{l^3}{3} \Big|_5^{10} \right) \right\} - \\ & - \frac{5 \times 1.7098}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 - \frac{7.132 \times 5^2}{2} = -201.88 \text{ tf m.} \end{aligned}$$

Finalmente, é fácil mostrar que a expressão geral se reduz a

$$\begin{aligned} \sum M_x = & -21.122 \int \mathcal{H}(x-a) dx + R_1 \int \mathcal{H}(x-b) dx - 2.5 \int \mathcal{H}(x-b) dx - \\ & - 2 \times 1.7098 \times \hat{\delta}(x, x_1) \frac{l^2}{8} - \delta \hat{M} - 2.8 \int \mathcal{H}(x-c) dx - 7.132 \int (x-d) \mathcal{H}(x-d) dx. \end{aligned}$$

A primeira integração entre chaves fornece

$$\frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1 l^2}{8} - \frac{l^3}{24} \right).$$

A segunda integração conduz a

$$\frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1^2 l}{2} - \frac{3x_1 l^2}{4} + \frac{7l^3}{24} \right).$$

A soma das duas produz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1^2 l}{2} - \frac{3x_1 l^2}{4} + \frac{7l^3}{24} + \frac{x_1 l^2}{8} - \frac{l^3}{24} \right); \\ & \frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1^2 l}{2} - \frac{5x_1 l^2}{8} + \frac{6l^3}{24} \right). \end{aligned}$$

Uma vez que $x_1 = l$ após a execução das integrações,

$$\frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1 l^2}{8} \right) = \frac{1}{l} \left(\frac{l^3}{8} \right) = \frac{l^2}{8}.$$

3.4. Carga em rampa “cum” carga retangular

Consideremos o esquema de distribuição de cargas representado na Figura 7. Com fundamento nos cálculos anteriores, teremos o seguinte modelamento

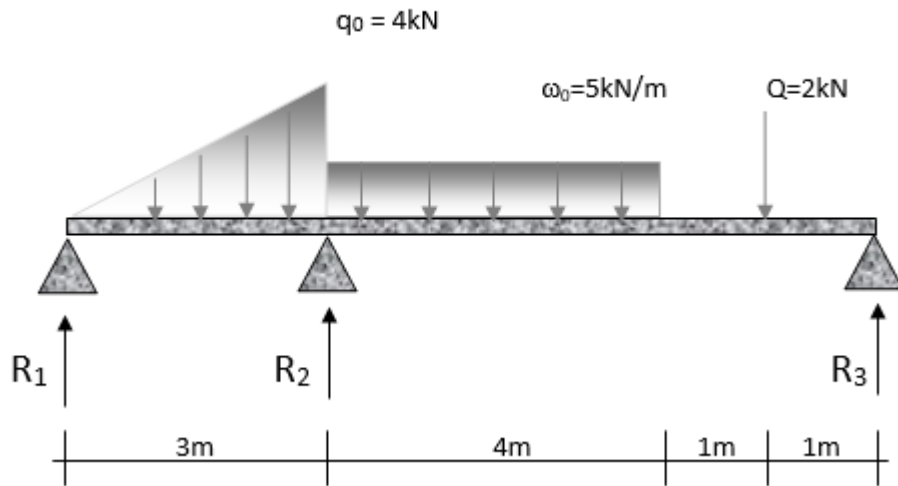


Fig. 7 – Cargas distribuídas em modos variados.

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 = & R_1 \int \mathcal{H}(x-a) dx - \int \left[q_0 \frac{l}{x} \int \mathcal{H}(x-l) dx \right] dl + R_2 \int \mathcal{H}(x-d) dx - \\ & - \frac{\omega_0}{2} \int (x-e) \mathcal{H}(x-e) dx + \frac{\omega_0}{2} \int (x-f) \mathcal{H}(x-f) dx - Q \int \mathcal{H}(x-g) dx. \end{aligned}$$

Em *kets* tem-se que

$$\begin{aligned} \sum M_x = & R_1 \langle x-a \rangle^1 - \int \left[q_0 \frac{l}{x} \langle x-l \rangle^1 \right] dl + R_2 \langle x-d \rangle^1 - \\ & - \frac{\omega_0}{2} \langle x-e \rangle^2 + \frac{\omega_0}{2} \langle x-f \rangle^2 - Q \langle x-g \rangle^2. \end{aligned}$$

A integral dupla para a curva elástica fornece

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle^3}{6} - \int q_0 l \left[\iint x^{-1} \langle \mathbf{x} - \mathbf{l} \rangle^1 d\mathbf{x} \right] dl + \frac{R_2 \langle \mathbf{x} - \mathbf{d} \rangle^3}{6} - \right. \\ \left. - \frac{\omega_0}{24} \langle \mathbf{x} - \mathbf{e} \rangle^4 + \frac{\omega_0}{24} \langle \mathbf{x} - \mathbf{f} \rangle^4 - \frac{Q \langle \mathbf{x} - \mathbf{g} \rangle^3}{6} + C_1 \mathbf{x} + C_2 \right].$$

3.4.1. Abstraindo tudo menos a carga q_0 :

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle^3}{6} - \int q_0 l \left[\iint x^{-1} \langle \mathbf{x} - \mathbf{l} \rangle^1 d\mathbf{x} \right] dl + C_1 \mathbf{x} + C_2 \right].$$

A equação (17) nos permite escrever

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle^3}{6} - q_0 \int \left[\frac{3x^2 l - 10xl^2 + 12l^3 - 6x^{-1}l^4 + x^{-2}l^5}{12} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x^2 l - 5xl^2 + 10l^3 - 10x^{-1}l^4 + 5x^{-2}l^5 - x^{-3}l^6}{20} \right] + C_1 \mathbf{x} + C_2 \right].$$

Executando a integração exterior,

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle^3}{6} - \frac{q_0}{60} \int \left[\frac{18x^2 l^2}{2} - \frac{65xl^3}{3} + \frac{90l^4}{4} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{60x^{-1}l^5}{5} + \frac{20x^{-2}l^6}{6} - \frac{3x^{-3}l^7}{7} \right] + C_1 \mathbf{x} + C_2 \right].$$

As substituições de praxe conduzem a

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{q_0 \mathbf{x}}{24EI} \left[l^3 - 2\mathbf{x}^2 l + \frac{2}{5} \left(9\mathbf{x} l_0^2 - \frac{65l_0^3}{3} + \frac{45l_0^4}{2\mathbf{x}} - 12\mathbf{x}^{-2} l_0^5 + \frac{10\mathbf{x}^{-3} l_0^6}{3} - \frac{3\mathbf{x}^{-4} l_0^7}{7} \right) \right];$$

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{q_0 \mathbf{x}}{24EI} [l^3 - 2\mathbf{x}^2 l + 7.97];$$

$$\delta_{q_0} = \frac{287.5}{EI}.$$

3.4.2 *Abstraindo tudo menos a carga ω_0 :*

$$\frac{1}{EI} \iint M_x d\mathbf{x} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 \langle \mathbf{x} - a \rangle^3}{6} - \frac{\omega_0}{24} \langle \mathbf{x} - e \rangle^4 + \frac{\omega_0}{24} \langle \mathbf{x} - f \rangle^4 + C_1 \mathbf{x} + C_2 \right],$$

com $e=3, f=7, R_1 = \frac{\omega_0 l}{2}, C_1 = -\frac{\omega_0 l^3}{24}$. Dessa forma,

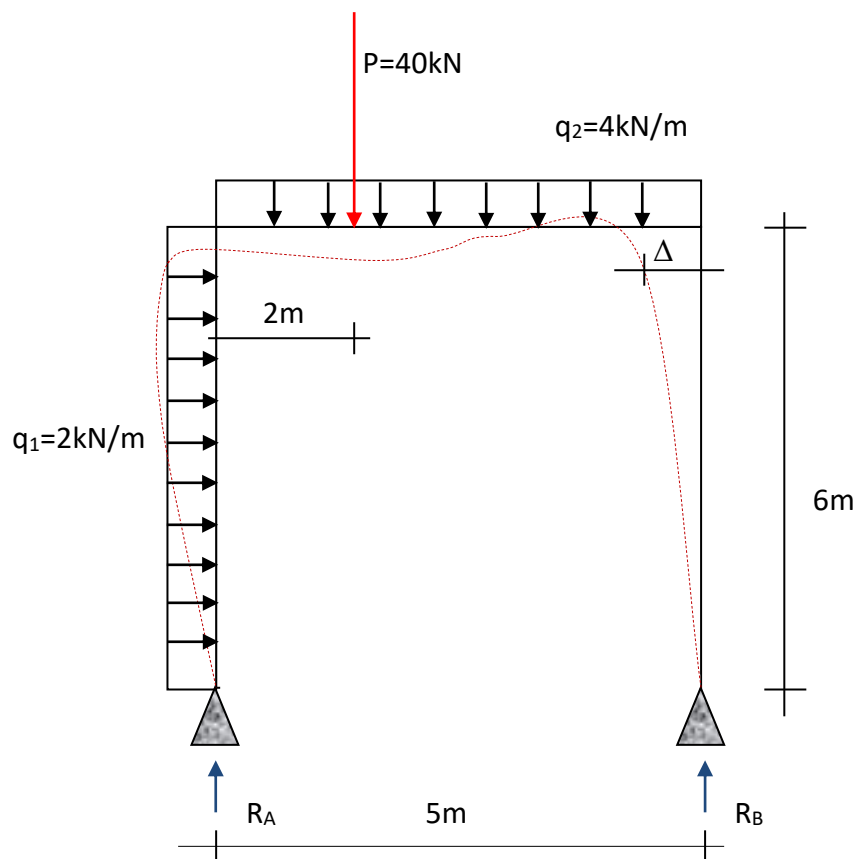
$$\delta_{\omega_0} = \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{24EI} \left[2l\mathbf{x}^2 - \frac{\mathbf{x}-3}{}^4 + \frac{\mathbf{x}-7}{}^4 - l^3 \right];$$

$$\delta_{\omega_0} = \frac{\omega_0 \mathbf{x}}{24EI} \left[l^3 - 2l\mathbf{x}^2 + \frac{\mathbf{x}-3}{}^4 - \frac{\mathbf{x}-7}{}^4 \right];$$

$$\delta_{\omega_0} = \frac{621}{EI}.$$

3.4. Modelagem de pórticos

Minhas investigações acerca das estruturas hiperestáticas mostraram que é possível estender a aplicação das funções de singularidade ao modelamento global de pórticos, facilitando sobremaneira a ulterior formalização das curvas elásticas e minimizando a possibilidade de equívocos de concepção física das estruturas. Por acaso que se afigure, não custa lembrar que tal poder de síntese numa abordagem analítica dessa natureza só é factível devido à indiferença da gramática utilizada às disposições geométricas do travejamento em foco. Senão vejamos um exemplo clássico de pórtico.



Tomando-se o somatório dos momentos referente ao apoio A, teremos

$$\sum M_A = 0 = R_B \int \mathcal{H}(x-a) dx - P \int \mathcal{H}(x-b) dx - \frac{q_2}{2} \int (x-c) \mathcal{H}(x-c) dx - \frac{q_1}{2} \int (y-c) \mathcal{H}(y-c) dy,$$

observando que, para evitar confusão, o termo da carga q_1 foi estabelecido relativamente à dimensão linear vertical. Dessa forma, tem-se que

$$\sum M_A = 0 = R_B x - P \langle x-b \rangle^1 - \frac{q_2}{2} \langle x-c \rangle^2 - \frac{q_1}{2} \langle y-c \rangle^2;$$

$$\sum M_A = 0 = R_B x - P x - 3 - \frac{q_2}{2} x^2 - \frac{q_1}{2} y^2;$$

$$\sum M_A = 0 = 5R_B - 40 \times 2 - \frac{4}{2} 5^2 - \frac{2}{2} 6^2;$$

$$\sum M_A = 0 = 5R_B - 80 - 50 - 36;$$

$$R_B = \frac{166}{5} = 33.2 \text{ kN}.$$

Somando-se os esforços cortantes, deduzimos o valor de R_A ,

$$33.2 + R_A - 40 - 20 = 0;$$

$$R_A = 26.8 \text{ kN}.$$

Com estes cálculos executados pode-se partir para a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais para a determinação de Δ em função das forças reais atuantes. Evidentemente, todas as situações especiais, tais como cargas fantasmas, cargas distribuídas em rampa linear ou parabólica, etc., também se aplicam a pórticos sem nenhuma dificuldade.

4. Considerações finais sobre elementos finitos

Um elemento finito nada mais é do que uma célula abstrata resultante do artifício de se fragmentar uma determinada geometria em partes menores tratáveis pela matemática finita. Quanto menores forem as células representantes da geometria, maior o seu número, e, portanto, mais próxima da geometria real é a representação global que criamos para simulá-la. As células se conectam por intermédio de regiões singulares, denominadas “nós” ou “pontos nodais” (particularmente no caso de curvas). Eu, porém, prefiro o termo geral “junção”, que se adequa melhor a qualquer variedade n-dimensional. Devido à fragmentação da geometria, a variedade símile que descreve o comportamento físico a ela associado não corresponderá de maneira exata à situação real. Portanto, a precisão da representação depende da quantidade de junções e células, de seus tamanhos e de seus tipos. Esse é o fundamento das simulações numéricas computacionais.

A aplicação das funções de singularidade guarda íntima relação com a noção de elemento finito, na medida em que a modelagem da curva de momentos fletores que constrói a evolução do “torque” referente ao ponto central da transversina da ponte simétrica estudada anteriormente será tanto mais precisa quanto maior o número de intervalos definidos para análise. Dessa forma, cada “fragmento” $\langle x - x_0 \rangle^n$ é de fato um elemento finito tão pequeno quanto se queira, mas somente até um limite finito.

Por último, existe verdadeiramente uma arte matemática de modelar problemas físicos. Essa arte estaria extinta por completo, não fosse umas poucas mentes interessadas em desafiar o mito de que a física clássica está consumada em definitivo. A ciência, pela sua própria natureza, nunca se esgota. Sempre há problemas e melhorias a serem feitas. Espero que o tratado aqui apresentado inspire mais pessoas a saírem da letargia criativa e do comodismo tecnológico do nosso tempo.

Referências

- [1] Aydogan, M. 1995. “Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation.” *J. of Str. Eng.* 121.
- [2] Clebsch, A. 1862. *Theorie der Elasticität Fester Körper*. B.G. Teubner, Leipzig.

- [3] Hibbeler, R. 2012. Resistência dos Materiais. Pearson, 7ª Edição.
- [4] Macaulay, W. 1919. "A Note on the Deflection of Beams." *Messenger of Mathematics*, 48: 129-130.
- [5] Serpa, N., and Steiner R. 2016. "General Relativity, Quantum Gravity and All That: Time Machines in Perspective by Singularity Functions." *Bulg. Jour. Phys.* 43(1): 1-20.
- [6] Schwarz, L. 1966. *Thorie des Distributions*. Hermann, Paris.
- [7] Sousa, M.; Polistchuk, N. 2017. Cálculos Comparativos Acerca das Cargas Solicitantes na Ponte sobre o Córrego Concórdia com Base nas Normas NB-6/1960 e NBR 7188/2013. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Paulista. Orientador: Nilo Silvio Costa Serpa.
- [8] Stephen, G. 2007. "Macaulay's Method for a Timoshenko Beam." *Int. J. of Mechanical Engineering Education* 35(4).
- [9] Timoshenko, S.; MacCullough, G. 1949. *Elements of Strength of Materials*, 3rd Edition, D. Van Nostrand Company, Inc., New York.
- [10] Yavari, A. et al. 2000. "On Applications of Generalized Functions to Beam Bending Problems." *Int. J. of Solids and Struct.* 5675-5705.
- [11] Yavetz, I. 1995. *From Obscurity to Enigma: The Work of Oliver Heaviside*. Birkhäuser Vetrlag.
- [12] Winkler, E. 1867. *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*. Dominicus, Praga.